

MAPAS DE PROGRESO DE MATEMÁTICAS

IPEBA y Ministerio de Educación del Perú
Lima, Septiembre del 2013
Marino Latorre Ariño - Resumen y adaptación

¿Qué son los estándares de aprendizaje nacionales?

Son metas de aprendizaje claras que se espera que alcancen todos los estudiantes del país a lo largo de su escolaridad básica.

La Matemática desarrolla en el estudiante competencias que le permitan *plantear y resolver con actitud analítica los problemas de su contexto y de la realidad*¹, de manera que pueda usar esas competencias matemáticas con flexibilidad en distintas situaciones.

1 Ministerio de Educación del Perú (2008). Diseño Curricular Nacional, p. 316.

Las competencias de Matemática se han organizado en cuatro Mapas de Progreso:

- Número y operaciones
- Cambio y relaciones
- Geometría
- Estadística y probabilidad

EL MAPA DE PROGRESO DE CAMBIO Y RELACIONES

El Mapa de Progreso de Cambio y Relaciones describe el desarrollo de la competencia para identificar patrones, describir y caracterizar generalidades, modelar fenómenos reales referidos a las relaciones cambiantes entre dos o más magnitudes, utilizando desde gráficos intuitivos hasta expresiones simbólicas como las igualdades, desigualdades, equivalencias y funciones.

La descripción del progreso del aprendizaje en esta competencia se realiza en base a tres aspectos:

a) Interpretación y generalización de patrones. Implica el desarrollo de capacidades para identificar, interpretar y representar la regularidad existente en diferentes sucesiones a través de una expresión general que modele el comportamiento de sus términos.

b) Comprensión y uso de igualdades y desigualdades. Implica el desarrollo de capacidades para interpretar y representar las condiciones de una situación problemática, mediante igualdades o desigualdades, que permite determinar valores desconocidos y establecer equivalencias entre expresiones algebraicas.

c) **Comprensión y uso de las relaciones y funciones.** Implica el desarrollo de capacidades para identificar e interpretar las relaciones entre dos magnitudes, analizar la naturaleza del cambio y modelar situaciones o fenómenos del mundo real mediante funciones, con la finalidad de formular y argumentar predicciones.

Descripción de los niveles del Mapa de Cambio y Relaciones

<p>Destacado</p>	<p>Generaliza y verifica la regla de formación de sumatorias notables, de sucesiones con distintos patrones, evalúa el valor máximo o mínimo de una sucesión y formula conjeturas sobre el comportamiento de una sucesión cuando tiende al infinito.</p> <p>Interpreta que una variable puede representar un valor constante o un parámetro. Modela las condiciones planteadas en una situación mediante sistemas de inecuaciones lineales y ecuaciones exponenciales; utiliza con flexibilidad diversas técnicas de simplificación y de solución, y argumenta los procedimientos seguidos.</p> <p>Modela situaciones o fenómenos de diversos contextos haciendo uso de variadas funciones definidas en tramos; conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento exponencial, logarítmico o periódico³; formula, comprueba y argumenta conclusiones.</p>
<p>VII CICLO (3°, 4° y 5° de Secundaria)</p>	<p>Generaliza y verifica la regla de formación de progresiones geométricas, sucesiones crecientes y decrecientes con números racionales e irracionales, las utiliza para representar el cambio y formular conjeturas respecto del comportamiento de la sucesión.</p> <p>Representa las condiciones planteadas en una situación mediante ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones lineales con una variable; utiliza identidades algebraicas y técnicas de simplificación, comprueba equivalencias y argumenta los procedimientos seguidos. Modela diversas situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas, las describe y representa con expresiones algebraicas, en tablas o en el plano cartesiano.</p> <p>Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento lineal o cuadrático; formula, comprueba y argumenta conclusiones.</p>
<p>VI CICLO (1° y 2° de Secundaria)</p>	<p>Interpreta y crea patrones geométricos que se generan al aplicar traslaciones, reflexiones o rotaciones y progresiones aritméticas con números naturales en las que generaliza y verifica la regla de formación y la suma de sus términos. Interpreta que una variable puede representar también un valor que cambia. Identifica el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una desigualdad.</p> <p>Representa las condiciones planteadas en una situación problemática mediante ecuaciones lineales; simplifica expresiones algebraicas, comprueba equivalencias y argumenta los procedimientos seguidos.</p> <p>Modela diversas situaciones de cambio mediante relaciones de proporcionalidad inversa, funciones lineales y afines; las describe y representa en tablas, en el plano cartesiano y con expresiones algebraicas.</p> <p>Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes tiene un comportamiento lineal; formula, comprueba y argumenta conclusiones.</p>
<p>V CICLO (5° y 6° de Primaria)</p>	<p>Interpreta patrones que crecen y decrecen con números naturales, y patrones geométricos que se generan al aplicar traslaciones, reflexiones o giros; completa y crea sucesiones gráficas y numéricas; descubre el valor del término desconocido en una sucesión dado su orden, comprueba y explica el procedimiento seguido. Interpreta que una variable puede</p>

	<p>representar un valor desconocido en una igualdad. Interpreta cuándo una cantidad cumple con una condición de desigualdad.</p> <p>Representa las condiciones planteadas en una situación problemática mediante ecuaciones con números naturales y las cuatro operaciones básicas; explica el procedimiento seguido.</p> <p>Modela diversas situaciones de cambio mediante relaciones de proporcionalidad directa y relaciones de equivalencia entre unidades de medida de una misma magnitud, las describe y representa en tablas o en el plano cartesiano.</p> <p>Conjetura si la relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad directa, comprueba y formula conclusiones.</p>
<p>IV CICLO (3° y 4° de Primaria)</p>	<p>Interpreta patrones multiplicativos con números naturales y patrones de repetición que combinan criterios perceptuales y de posición; completa y crea sucesiones gráficas y numéricas; descubre el valor de un término desconocido en una sucesión, comprueba y explica el procedimiento seguido.</p> <p>Interpreta y explica equivalencias entre dos expresiones y sus posibles variaciones en caso se multipliquen o dividan ambos lados de la igualdad, haciendo uso de material concreto y gráfico.</p> <p>Determina el valor desconocido en una igualdad entre expresiones que involucran multiplicaciones o divisiones entre números naturales de hasta dos dígitos, y explica su procedimiento. Identifica y explica relaciones de cambio entre dos magnitudes y relaciones de equivalencia entre unidades de medida de una misma magnitud, y las representa en diagramas o tablas de doble entrada.</p>
<p>III CICLO (1° y 2° de Primaria)</p>	<p>Identifica patrones aditivos con números naturales de hasta dos cifras y patrones de repetición con dos criterios perceptuales, completa y crea sucesiones gráficas y numéricas y explica si un término pertenece o no pertenece a una sucesión. Interpreta y explica equivalencias entre dos expresiones y sus posibles variaciones en caso se agreguen o quiten cantidades hasta 20 a ambas expresiones, usando material concreto.</p> <p>Determina el valor desconocido en una igualdad entre expresiones que involucran adiciones y sustracciones, y explica su procedimiento. Establece, describe y representa gráficamente relaciones entre objetos de dos colecciones.</p>
<p>Previo (3-5 años)</p>	<p>Identifica y describe patrones de repetición con un criterio perceptual¹; completa, representa gráficamente y crea sucesiones con material concreto. Identifica relaciones entre objetos de dos colecciones, a partir de consignas dadas.</p>
<p><i>Observaciones:</i></p> <p>1. <i>Atributos que se perciben con los sentidos, como color, tamaño, textura, grosor, forma, etc.</i></p>	

Nivel Previo

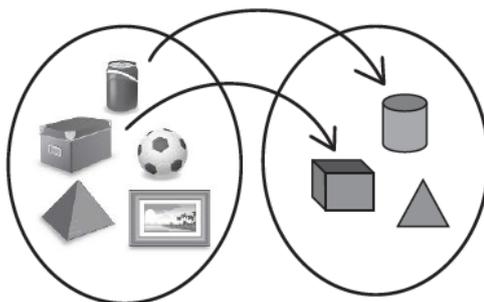
Identifica y describe patrones de repetición con un criterio perceptual⁴; completa, representa gráficamente y crea sucesiones con material concreto. Identifica relaciones entre objetos de dos colecciones, a partir de consignas dadas.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- ✓ Continúa secuencias sonoras usando palmadas, pisadas (zapateo), instrumentos o la combinación de estos.
- ✓ Describe eventos cotidianos que se repiten usando expresiones como, *después de*, *antes de*. Ejemplo: *Después del día viene la noche y después de la noche viene el día*.
- ✓ Completa una secuencia de patrones de repetición usando material concreto o haciendo dibujos; por ejemplo, continúa la siguiente secuencia:



- ✓ Crea una secuencia ordenada de objetos evidenciando un patrón de repetición.
- ✓ Reconoce qué pares de elementos de dos colecciones cumplen una determinada relación; por ejemplo, relaciona los objetos de acuerdo a la característica "tienen la misma forma".



⁴ Atributos que se perciben con los sentidos como color, tamaño, textura, grosor, forma, etc.

III Ciclo

(1° y 2° de Primaria)

Identifica patrones aditivos con números naturales de hasta dos cifras y patrones de repetición con dos criterios perceptuales, completa y crea sucesiones gráficas y numéricas, y explica si un término pertenece o no pertenece a una sucesión. Interpreta y explica equivalencias entre dos expresiones y sus posibles variaciones en caso se agreguen o quiten cantidades hasta 20 a ambas expresiones, usando material concreto. Determina el valor desconocido en una igualdad entre expresiones que involucran adiciones y sustracciones, y explica su procedimiento. Establece, describe y representa gráficamente relaciones entre objetos de dos colecciones.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- ✓ Completa los términos de una sucesión aditiva creciente o decreciente cuyo patrón va de dos en dos, de tres en tres o de cinco en cinco, empleando números menores que 100; por ejemplo, completa los términos en la siguiente sucesión:

11, 14, 17, ____, 23, 26, ____

- ✓ Describe oralmente cómo van cambiando los términos consecutivos en sucesiones gráficas con patrones de repetición o en sucesiones con patrones aditivos.
- ✓ Crea una sucesión con patrones de repetición con dos criterios perceptuales usando material concreto o haciendo dibujos; por ejemplo:



- ✓ Representa con material concreto y símbolos la igualdad entre dos expresiones aditivas; representa adiciones y sustracciones que sean equivalentes a $10 + 2$; por ejemplo:

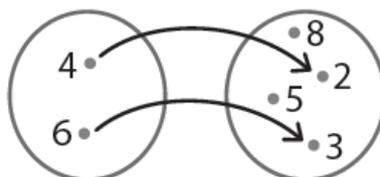
$10 + 2 = 15 - 3$, o bien que $10 + 2 = 8 + 4$.

- ✓ Agrega o quita una misma cantidad de objetos o números a ambos lados de una igualdad y comprueban que esta no cambia; por ejemplo, realiza la actividad con el material *Cuisenaire* y representa con números dichas equivalencias:

ROSADO	EQUIVALE	VERDE	
ROSADO	EQUIVALE	VERDE	
AMARILLO		AMARILLO	

$4 = 3 + 1$
$4 + 1 = 3 + 1 + 1$
$5 = 5$

- ✓ Concluye a partir de la experiencia con material concreto las propiedades de la adición; por ejemplo, dice que ganar 5 soles y luego 3 soles es lo mismo que ganar 3 soles y luego 5 soles (propiedad conmutativa)
- ✓ Describe la relación entre objetos de dos colecciones; por ejemplo, reconoce en un gráfico la relación “es el doble de”.



IV Ciclo (3° y 4° de Primaria)

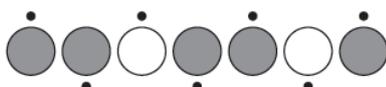
Interpreta patrones multiplicativos con números naturales y patrones de repetición que combinan criterios perceptuales y de posición; completa y crea sucesiones gráficas y numéricas; descubre el valor de un término desconocido en una sucesión; y comprueba y explica el procedimiento seguido. Interpreta y explica equivalencias entre dos expresiones y sus posibles variaciones en caso se multipliquen o dividan ambos lados de la igualdad, haciendo uso de material concreto y gráfico.

Determina el valor desconocido en una igualdad entre expresiones que involucran multiplicaciones o divisiones entre números naturales de hasta dos dígitos y explica su procedimiento. Identifica y explica relaciones de cambio entre dos magnitudes y relaciones de equivalencia entre unidades de medida de una misma magnitud, y las representa en diagramas o tablas de doble entrada.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

Explica cómo cambian los términos consecutivos en una sucesión con un patrón multiplicativo.

- Crea secuencias con patrones de repetición que combinan criterios perceptuales y de posición y los representa con dibujos o símbolos; por ejemplo: color y posición (dos círculos grises y uno blanco, el punto está alternadamente arriba y abajo)

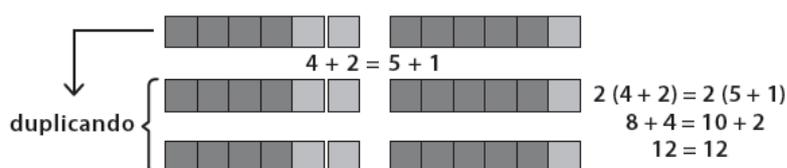


- Diferencia el uso del signo igual para expresar el resultado de una operación y por otra parte presenta su uso para expresar una equivalencia entre expresiones numéricas; por ejemplo:

$$3 + 17 = 20 \text{ (como resultado)}$$

$$22 - 2 = 3 + 17 \text{ (como equivalencia)}$$

- Comprueba con material concreto o gráfico que dos expresiones siguen siendo equivalentes si multiplica o divide por un mismo valor a cada lado de una igualdad; por ejemplo:



- Concluye a partir de la experiencia con material concreto y gráfico que, al cambiar el orden de los factores o asociarlos indistintamente, el producto no cambia; por ejemplo, dice que el producto de 4×8 da lo mismo que 8×4 .
- Representa una cantidad desconocida en una igualdad utilizando íconos y determina su valor usando las propiedades de la igualdad; por ejemplo, obtiene el valor de un Θ en la expresión $12 \times \Theta = 72$
- Explica la relación de cambio entre dos magnitudes en diversas situaciones y en distintos formatos; por ejemplo, describe el crecimiento de una planta en relación a los días transcurridos.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura de la planta (cm)	0	0	0	0	1	1	2	3	3	4
Cambio observado	Ha brotado una raíz de la semilla			El tallo está por salir		El tallo y raíces empiezan a crecer				

- Relaciona unidades de longitud, masa y tiempo para establecer equivalencia; por ejemplo, identifica que 1 metro equivale a 100 cm; que $\frac{1}{2}$ kg equivale a 500 g, y que 36 horas equivale 1 día y medio.

V Ciclo

(5° y 6° de Primaria)

Interpreta patrones que crecen y decrecen con números naturales, y patrones geométricos que se generan al aplicar traslaciones, reflexiones o giros; completa y crea sucesiones gráficas y numéricas; descubre el valor del término desconocido en una

sucesión dado su orden; comprueba y explica el procedimiento seguido. Interpreta que una variable puede representar un valor desconocido en una igualdad. Interpreta cuándo una cantidad cumple con una condición de desigualdad.

Representa las condiciones planteadas en una situación problemática mediante ecuaciones con números naturales y las cuatro operaciones básicas; explica el procedimiento seguido. Modela diversas situaciones de cambio mediante relaciones de proporcionalidad directa y relaciones de equivalencia entre unidades de medida de una misma magnitud; las describe y representa en tablas o en el plano cartesiano.

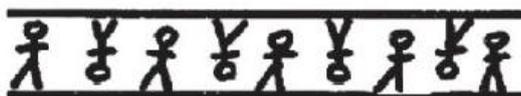
Conjetura si la relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad directa; comprueba y formula conclusiones.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- ✓ Completa el término desconocido en una sucesión creciente; por ejemplo:



- ✓ Crea sucesiones de términos que siguen patrones geométricos de traslación, reflexión o giro; por ejemplo, crea una sucesión construida en base a giros y traslaciones.



- ✓ Explica cómo halló el término desconocido en una sucesión cuando le dan la posición de ese término; por ejemplo, explica cómo encontró el término 80 en la sucesión que se muestra, diciendo que “cada ficha que ocupa una posición múltiplo de tres es blanca; 81 es múltiplo de tres; entonces la ficha 80 será de color gris”.



- ✓ Determina el valor de una variable en una igualdad; por ejemplo, calcula la base de un rectángulo que tiene 12 m² de área y 4 m de altura.

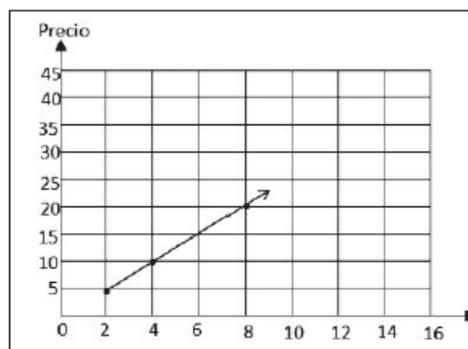
$$A = b (h) \quad \Longrightarrow \quad 12 = b (4) \quad \Longrightarrow \quad b = 3 \text{ m}$$

- ✓ Identifica en distintas situaciones valores que verifican una desigualdad; por ejemplo, reconoce los objetos que puede pesar en una balanza graduada máximo en 5 kg.
- ✓ Interpreta modelos de proporcionalidad directa expresados en tablas o gráficos; por ejemplo:

Peso (kg)	Precio (Nuevos soles)
2	5
4	10
8	20
12	
16	

Para hallar el precio de 12 kilos, se sumará los precios de 8 y 4 kg

Cómo 4 kg es el doble que 2 kg. Entonces el costo también se duplica



- ✓ Explica cuándo el cambio entre dos magnitudes es directamente proporcional; por ejemplo, explora los cambios entre las magnitudes y, señala dichos cambios y concluye que en la tabla 2 la relación no es proporcional.

Relación entre el peso y el costo

Tabla 1

Peso (kg)	Precio (Nuevos soles)
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

triplica

duplica

Tabla 2

Peso (kg)	Precio (Nuevos soles)
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11

triplica

duplica

no triplica

no duplica

VI Ciclo

(1° y 2° de Secundaria)

Interpreta y crea patrones geométricos que se generan al aplicar traslaciones, reflexiones o rotaciones y progresiones aritméticas con números naturales en las que generaliza y verifica la regla de formación y la suma de sus términos. Interpreta que una variable puede representar también un valor que cambia. Identifica el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una desigualdad.

Representa las condiciones planteadas en una situación problemática mediante ecuaciones lineales; simplifica expresiones algebraicas, comprueba equivalencias y

argumenta los procedimientos seguidos. Modela diversas situaciones de cambio mediante relaciones de proporcionalidad inversa, funciones lineales y afines; las describe y representa en tablas, en el plano cartesiano y con expresiones algebraicas.

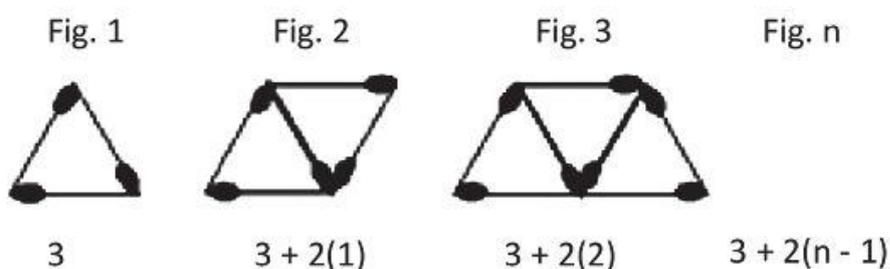
Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes tiene un comportamiento lineal; formula, comprueba y argumenta conclusiones.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- ✓ Completa el término que falta en una sucesión con patrones geométricos (traslación, reflexión o rotación); por ejemplo:

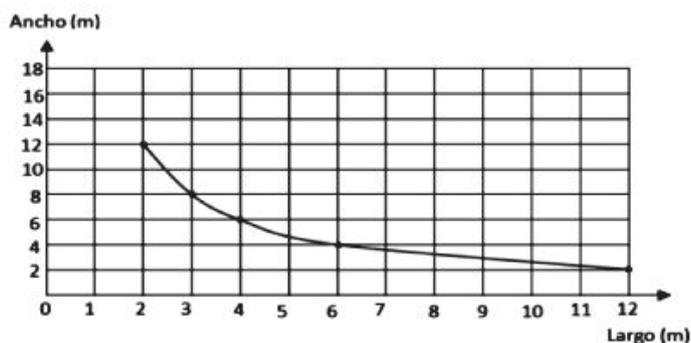


- ✓ Deduce una regla general para encontrar cualquier término de una progresión aritmética con números naturales; por ejemplo, en la progresión aritmética formada por el número de palitos de cada figura, explica que cada nueva figura se forma agregando dos palitos más.



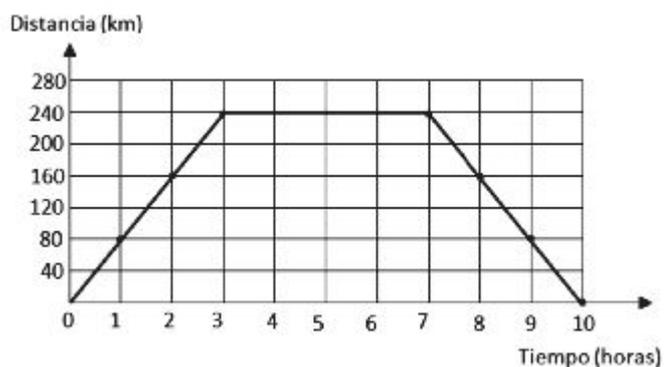
- ✓ Identifica que la suma de términos equidistantes a un término cualquiera de una progresión aritmética da siempre el mismo valor y usa esta conclusión para determinar la regla de la suma de términos de la progresión aritmética.
- ✓ Determina los distintos valores que puede tomar una variable; por ejemplo, dos cuadernos y un fólter costaron S/. 10. ¿Cuáles son los posibles precios de cada objeto?
- ✓ Interpreta el significado de una desigualdad doble y la simboliza; por ejemplo, expresa el rango de precios mayores a S/. 75,50 soles y menores que S/. 99,90 escribiendo $75,50 < x < 99,90$.
- ✓ Interpreta y describe modelos de proporcionalidad inversa expresadas en tablas o gráficos; por ejemplo, establece la relación entre las dimensiones de rectángulos que tienen la misma área.

Largo (m)	2	3	4	6	12
Ancho (m)	12	8	6	4	2



- ✓ Explica que el crecimiento o decrecimiento de una función lineal está determinado por el sentido de la razón constante de cambio; por ejemplo: Describe los cambios de sentido presentados en un gráfico lineal.

$2c + f = 10$	
$2(0) + 10 = 10$	$c = 0 \quad f = 10$
$2(1) + 8 = 10$	$c = 1 \quad f = 8$
$2(2) + 6 = 10$	$c = 2 \quad f = 6$
$2(3) + 4 = 10$	$c = 3 \quad f = 4$
$2(4) + 2 = 10$	$c = 4 \quad f = 2$
$2(5) + 0 = 10$	$c = 5 \quad f = 0$



El estudiante indica que el auto avanza 240 km. en tres horas, luego se detiene cuatro horas y regresa al punto de partida entre tres horas.

- ✓ Relaciona las diferentes representaciones de una función lineal; por ejemplo, identifica si los datos de una tabla se relacionan con una representación gráfica o algebraica.

- ✓ Modela el cambio entre dos magnitudes mediante la función afín; por ejemplo, modela el cálculo del sueldo de un vendedor de electrodomésticos que tiene sueldo fijo de S/. 500 y comisiones de S/. 50 por cada artículo vendido con la expresión $y = 50x + 500$.

VII Ciclo

(3°, 4° y 5° de Secundaria)

Generaliza y verifica la regla de formación de progresiones geométricas, sucesiones crecientes y decrecientes con números racionales e irracionales; las utiliza para representar el cambio y formular conjeturas respecto del comportamiento de la sucesión.

Representa las condiciones planteadas en una situación mediante ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones lineales con una variable; usa identidades algebraicas y técnicas de simplificación, comprueba equivalencias y argumenta los procedimientos seguidos. Modela diversas situaciones de cambio

mediante funciones cuadráticas, las describe y representa con expresiones algebraicas, en tablas o en el plano cartesiano.

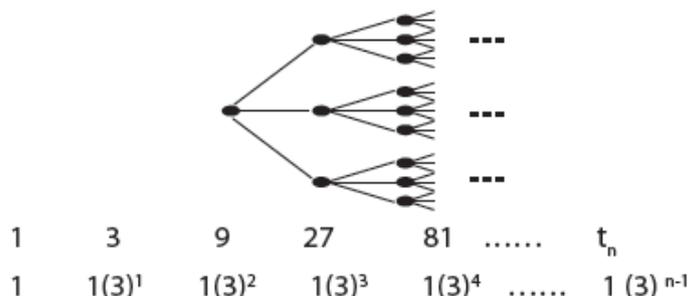
Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento lineal o cuadrático; formula, comprueba y argumenta conclusiones.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- Crea sucesiones crecientes y decrecientes con números racionales cuyo patrón de formación comprende dos o varias operaciones, como en la siguiente sucesión:

$$2, 3/2, 4/3, 5/4, \dots, (n+1)/n$$

- Deduce una regla general para encontrar cualquier término de una progresión geométrica.



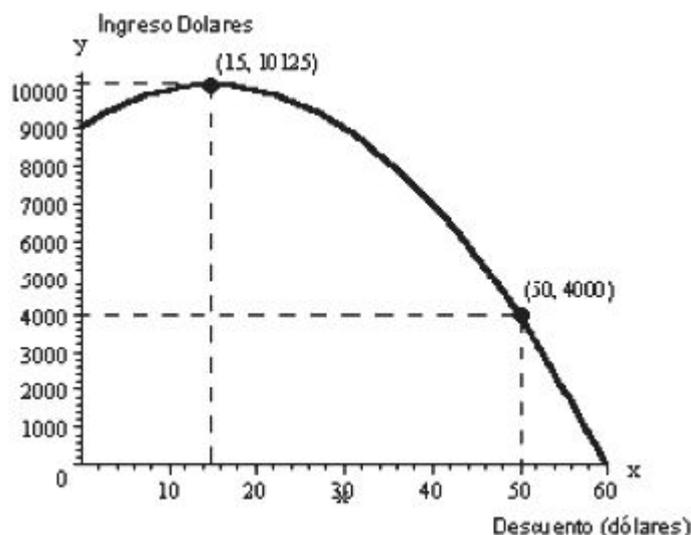
- Interpreta identidades algebraicas a partir de expresiones numéricas y representaciones geométricas; por ejemplo, interpreta la fórmula del binomio al cuadrado descomponiendo áreas.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Resuelve situaciones problemáticas mediante ecuaciones cuadráticas con una variable e interpreta los valores obtenidos de acuerdo al contexto del problema.
- Resuelve situaciones problemáticas mediante inecuaciones lineales con una variable. Ejemplo: Si al doble de la cantidad de monedas de 5 soles

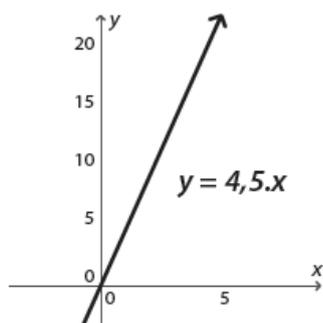
que tengo le sumo 1000 soles, juntaré más de 3 700 soles. ¿Cuántas monedas de 5 soles tengo como mínimo?

- Discrimina si un conjunto de pares ordenados o un gráfico cartesiano representa a una función lineal, cuadrática o exponencial, a partir de las características de crecimiento de cada función.
- Interpreta y describe modelos de funciones cuadráticas; por ejemplo, interpreta los intervalos de crecimiento y decrecimiento en la función $y = -5x^2 + 150x + 9000$, que define la relación entre ingreso y descuento.



- Identifica cómo se generan otras magnitudes a partir de funciones lineales o cuadráticas entre magnitudes; por ejemplo, identifica que el producto de masa por aceleración genera la fuerza y que el cociente de distancia entre tiempo genera la velocidad.
- Argumenta sus predicciones sobre el comportamiento lineal o cuadrático de la relación entre dos magnitudes; por ejemplo, respecto a los gráficos y tablas que se presentan líneas abajo, indica que se observa que por cada kilo adicional de arroz aumenta el precio en 4,5 soles; por tanto, el cálculo del precio del arroz está dado por la función lineal $y = 4,5(x)$ y su comportamiento es lineal.

Relación entre precio y cantidad del arroz extra (Válido para compras a granel menores de 20 kg.)



Cantidad (kg)	Precio (S./.)
1	1
2	2
4	4
8	8
10	10
16	16

Nivel Destacado

Generaliza y verifica la regla de formación de sumatorias notables y de sucesiones con distintos patrones; evalúa el valor máximo o mínimo de una sucesión; formula conjeturas sobre el comportamiento de una sucesión cuando tiende al infinito. Interpreta que una variable puede representar un valor constante de un parámetro. Modela las condiciones planteadas en una situación mediante sistemas de inecuaciones lineales y ecuaciones exponenciales; usa con flexibilidad diversas técnicas de simplificación y de solución, y argumenta los procedimientos seguidos. Modela situaciones o fenómenos de diversos contextos haciendo uso de variadas funciones definidas en tramos; conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento exponencial, logarítmico o periódico⁵; formula, comprueba y argumenta conclusiones.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

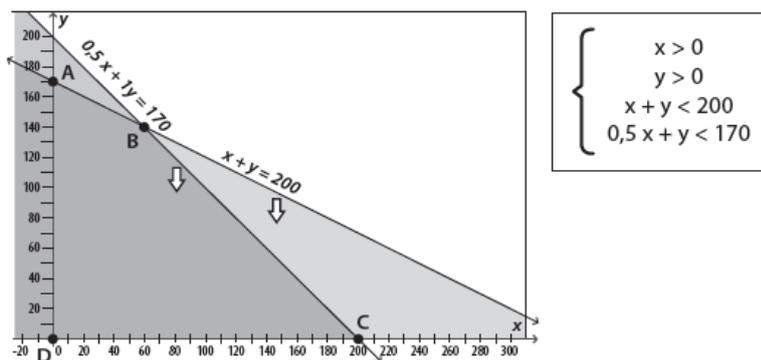
✓ Determina a partir de casos particulares las expresiones generales de sumatorias notables, como la suma de números pares, impares, cuadrados perfectos, cubos perfectos y las n primeras potencias naturales.

✓ Identifica el valor máximo o mínimo que va tomando una sucesión al acercarse a infinito empleando herramientas tecnológicas; por ejemplo, explora con ayuda de herramientas tecnológicas (*calculadora o algún software*) cuál es el valor máximo de la sucesión: $1/2$; $2/3$; $3/4$; $4/5$; $5/6$; ... $n/n+1$

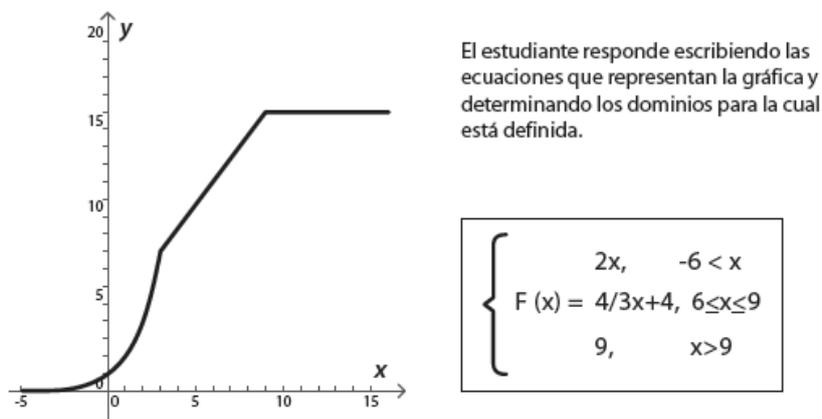
Término	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{30}{31}$	$\frac{100}{101}$
Valor decimal	0,500	0,6667	0,75000	0,80000	0,83333	0,96774	0,99009

El estudiante nota que, a medida que los valores de la fracción aumentan, el cociente entre ellos se acerca a 1 y que concluyendo que, cuanto más grande los valores del término, más cercana es la diferencia entre ellos, de manera que el cociente es casi 1.

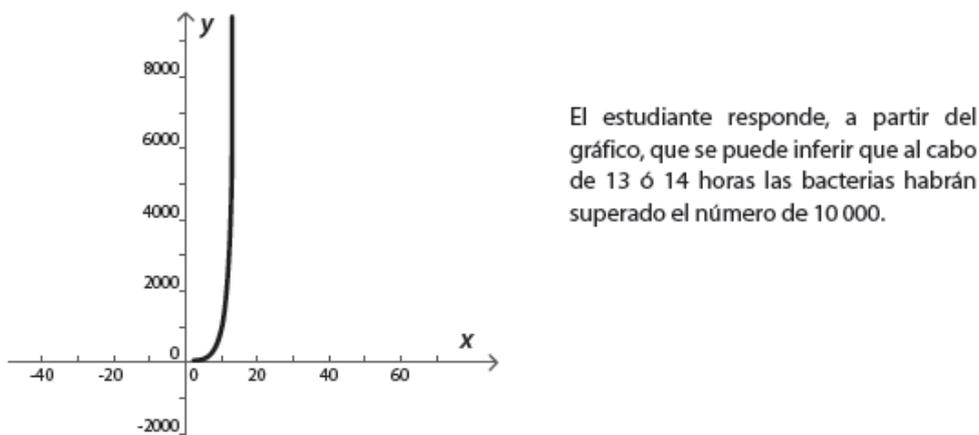
✓ Resuelve por métodos gráficos una situación problemática mediante un sistema de inecuaciones lineales con dos variables; por ejemplo, ante el problema: “Se tiene S/. 140 soles para invertir en un máximo de 200 sándwiches, sabiendo que se gana S/. 1 por cada pan con pollo y de S/. 0,50 por cada pan con huevo. ¿Cuántos sándwiches de cada tipo se deben vender para obtener el máximo beneficio?”, el estudiante resuelve la situación planteando sistemas de inecuaciones y usando métodos gráficos.



✓ Interpreta y representa modelos de funciones definidas en tramos; por ejemplo, dada una función definida en tramos, el estudiante la gráfica considerando los dominios para la cual se encuentra definida.



✓ Argumenta sus predicciones sobre el comportamiento exponencial o periódico de la relación entre dos magnitudes. Ejemplo: El crecimiento del número de bacterias está dado por la fórmula $y = 2^x$, pues cada hora duplican su cantidad. ¿Cuántas horas habrán pasado para que haya más de 10 000 células de bacterias?



%%%

GLOSARIO

1. ARGUMENTAR. Dar razones lógicas o matemáticas que permitan sustentar, probar o demostrar la veracidad o falsedad de una proposición o idea planteada (Ministerio de Educación, 2004, p.28).

2. CLASIFICAR. Disponer un conjunto de datos o elementos en subconjuntos o clases de acuerdo a uno o varios criterios. Abarca la identificación de propiedades de los objetos y la comparación mediante el establecimiento de diferencias y semejanzas entre elementos. La clasificación se distingue del simple agrupamiento en tanto que utiliza criterios que permiten incluir a todos los elementos dados en alguno de los grupos establecidos.

3. COMPARAR. Establecer una relación entre los atributos cuantitativos o cualitativos que existe entre dos entes matemáticos de un mismo conjunto o clase (Ministerio de Educación, 2004).

4. COMPROBAR. Verificar, confirmar la veracidad o exactitud de un objeto matemático o situación a través de su concepto o propiedades.

5. CONJETURAR. Es elaborar suposiciones o hipótesis acerca de la verdad o falsedad de una afirmación, conclusión o resultado matemático a partir de indicios y observaciones.

6. DESCRIBIR. Explicar con detalle las características o condiciones en que presenta algún objeto matemático usando el lenguaje oral (Adaptado del Diccionario de la Lengua española de Real Academia Española, 2012).

7. EVALUAR. Valorar o determinar el grado de efectividad de un conjunto de estrategias o procedimientos, a partir de su coherencia o aplicabilidad a otras situaciones problemáticas.

8. ESTABLECER EQUIVALENCIAS. Proceso que consiste en componer y descomponer un número, que puede llevarse a cabo de dos maneras distintas (Ministerio de Educación, 2009, p. 5):

- Expresar un número natural compuesto por unidades de diferente orden del sistema de numeración decimal, como las unidades, decenas y centenas. Esto corresponde a la primera fase en el desarrollo de la comprensión del sistema de numeración decimal, donde los números se pueden ver bajo el esquema *parte - todo*, es decir, que un número está compuesto por otros números.

- Expresar un número natural usando, múltiples composiciones de una cantidad además de usar las unidades convencionales; por ejemplo $64 = 50 + 14$ se interpreta como *64 es igual que decir 5 decenas y 14 unidades*, o también, $7428 = 6M + 17C + 2D + 8U$, así también expresar $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$. Esto corresponde a la segunda fase en el desarrollo de la comprensión del sistema de numeración decimal y del sentido numérico.

9. EXPLICAR. Describir o exponer las razones⁶ o procedimientos seguidos para la solución de un problema, exigiendo en el alumno establecer conexiones entre sus ideas.

6. El problema es que en la actualidad los objetivos de la mayoría de los currículos matemáticos se centran por completo en hacer y casi nada en explicar. Explicar es la actividad de exponer las relaciones existentes entre unos fenómenos y la "búsqueda de una teoría explicativa", como la describe Horton (1967), citado en *Enculturación matemática la educación matemática desde una perspectiva cultural*, Alan Bishop, Paidós, 1999, España.

10. GENERALIZAR. Identificar a partir de la observación de casos particulares la regla general que describe el comportamiento de, por ejemplo, una sucesión, una relación entre variables o de alguna ley matemática.

11. IDENTIDAD ALGEBRAICA. Son igualdades algebraicas que se verifican para cualquier valor que tomen sus variables. Las identidades suelen utilizarse para transformar una expresión matemática en otra equivalente, particularmente para resolver una ecuación, por ejemplo, la ecuación del binomio al cuadrado, la suma o diferencia de cubos, entre otras.

12. IDENTIFICAR. Diferenciar los rasgos distintivos de un objeto matemático; es decir, determinar si pertenece a una determinada clase que presenta ciertas características comunes (Hernández, Delgado y otros, 1999).

13. INTERPRETAR. Atribuir significado a las expresiones matemáticas, de modo que estas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problema real del que se trate. Implica tanto codificar como decodificar una situación problemática (Hernández, Delgado y otros, 1999, pp. 69-87).

14. MAGNITUD. Característica de un objeto o fenómeno que puede ser medida, como la longitud, la superficie, el volumen, la velocidad, el costo, la temperatura, el peso, etc.

15. MODELAR. Asociar un objeto no matemático a un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características considerados relevantes para la solución de un problema (Hernández, Delgado y otros, 1999, pp. 69-87).

16. PATRÓN ADITIVO. Es la secuencia de números cuyo criterio de formación es la suma o resta de un mismo valor a lo largo de toda la sucesión (Bressan, 2010); esta característica determina que puedan ser crecientes o decrecientes; por ejemplo, 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... o, también, 30, 25, 20, 15, 10,

17. PATRÓN MULTIPLICATIVO. Es la secuencia de números cuyo criterio de formación es la multiplicación o división de un mismo valor a lo largo de toda la sucesión; esta característica determina que puedan ser ascendentes o descendentes; por ejemplo, 4, 8, 16, 32, 64, 128,...

18. PATRÓN DE REPETICIÓN. Es la secuencia gráfica o numérica donde dos o varios de sus elementos se presentan en forma periódica. (Bressan, 2010); por ejemplo, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2,...

19. REPRESENTAR. Elaborar una imagen, gráfico o símbolo visual de un objeto matemático y sus relaciones empleando formas geométricas, diagramas, tablas, el plano cartesiano entre otros.

20. RESOLVER. Encontrar un método que conduzca a la solución de un problema matemático, que puede estar enmarcado en diferentes contextos (Ministerio de Educación, 2005).

21. VARIABLE. Una variable es un símbolo, habitualmente una letra, que puede ponerse en lugar de cualquier elemento de un conjunto, sean números u otros objetos. Las variables sirven para expresar regularidades y relaciones generales entre objetos de una manera eficaz.

Usos principales de las variables en matemáticas, descritas por Godino (2003):

- La variable como incógnita: Uso de la variable para representar el valor de un número u objeto desconocido que se manipula como si fuera conocido. Ejemplos: En la igualdad $4x + 2 = 3x + 5$, "x" representa al número 3.

- Las variables como indeterminadas o expresión de patrones generales. Uso de la variable para expresar enunciados que son ciertos para un determinado conjunto de números. Ejemplo: Para todos los números reales se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$.

- Las variables para expresar valores que varían conjuntamente. Uso de la variable para expresar una relación de dependencia entre dos magnitudes. Ejemplo: En la expresión $y = 5x + 6$, cuando cambia x también lo hace y.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRESSAN A. M., GALLEGO M. F. (2010). *El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones*, Revista Correo del Maestro, N° 168, mayo de 2010. Consultado en abril 2012 en: http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/corre_maestro__matematizacion_progresiva.pdf

BOSCH M, GARCÍA F, GASCÓN J, RUIZ L. (2006). *La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar, un propuesta de la teoría antropológica de lo didáctico*. Educación Matemática, agosto, vol 18, número 002, Ed Santillana, distrito federal de México. pp. 37-74. Consultado en enero de 2012 en: <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/40518203.pdf>

BUTTO, C. y RIVERA, T. *La generalidad una vía para acceder al pensamiento algebraico: un estudio sobre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo*, Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco. XI Congreso

Nacional de Investigación Educativa / 5. Educación y Conocimientos
Disciplinarios / Ponencia. Consultado en enero de 2012 en:
http://lab.iiiipe.net/congresonacional/docs/area_05/1330.pdf

FERREYRA N., RECHIMONT E., PARODI C., CASTRO N. (2010). *De la aritmética al álgebra. Experiencia de trabajo con estudiantes universitarios*. Revista Iberoamericana de educación Matemática, Marzo de 2010, Número 21, páginas 59-67. Consultado en junio de 2011 en:
http://www.fisem.org/web/union/revistas/21/Union_021_009.pdf

FRIPP, A. (2009). *Álgebra: Aportes para nuevas reflexiones*, revista *Que hacer educativo, didácticas y prácticas educativas*, abril 2009. Consultado en abril del 2012 en:
http://quehacereducativo.edu.uy/docs/474c1fa4_94%20did+%C3%ADctica%2003.pdf

GARCÍA, F., BOSCH, M., GASCÓN, J. y RUIZ, L. (2007). *El álgebra como instrumento de modelización articulación del estudio de las relaciones funcionales en educación secundaria*. Investigación en Educación Matemática, Universidad de Jaén. pp. 71-90. Consultado en diciembre del 2011 en:
<http://funes.uniandes.edu.co/1268/>

GODINO J. y FONT V. (2003). *Razonamiento Algebraico Para Maestros*, Repro Digital, Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación. Consultado en marzo del 2011 en:
www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf

GRAVEMEIJER, K. y TERUEL, J. *Hans Freudenthal: un matemático en didáctica y teoría curricular*. Traducción: Norma Saggesse, Fernanda Gallego y Ana Bressan(GPDM). J. Curriculum studies, 2000, vol. 32, Nº. 6, 777- 796

HERNÁNDEZ FERNÁNDEZ H., DELGADO RUBÍ J.R., FERNÁNDEZ DE ALAÍZA B., VALVERDE RAMÍREZ L., RODRÍGUEZ HUNG T. (1998). *Cuestiones de didáctica de la Matemática. Serie Educación. Conceptos y procedimientos en la educación polimodal y superior*. Homo Sapiens Ediciones: Rosario (Argentina).

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

- (2009). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular*. Lima, MED 2009, 2da edición. Aprobado con R.M. 0440 – 2008-ED.
- (2010). *Evaluación censal de estudiantes 2009 – segundo grado de primaria*. Guía de análisis para docentes – Matemática. Lima: Ministerio de educación.
- (2005). *Evaluación nacional del rendimiento estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados – primaria*. Lima: Ministerio de educación.

EL MAPA DE PROGRESO DE NÚMEROS Y OPERACIONES

IPEBA y Ministerio de Educación del Perú
Lima, Septiembre del 2013

Plantea y resuelve situaciones problemáticas de cantidades con soluciones pertinentes al contexto, que implican la construcción del significado y el uso de los números, sus relaciones y operaciones, empleando diversas representaciones y estrategias de resolución.

El Mapa de Números y Operaciones describe el desarrollo progresivo de la competencia para comprender y usar los números, sus diferentes representaciones y su sentido de magnitud; comprender el significado de las operaciones en cada conjunto numérico; usar dicha comprensión en diversas formas para realizar juicios matemáticos; y desarrollar estrategias útiles en diversas situaciones.

La progresión de los aprendizajes del Mapa de Números y operaciones se describe considerando dos aspectos, cada una de los cuales se va complejizando en los distintos niveles:

a. Comprensión y uso de los números. Implica el desarrollo de capacidades para comprender y usar los distintos conjuntos numéricos (N, Z, Q y R), identificar sus características, usos y las relaciones que se pueden establecer entre ellos; comprender el Sistema de Numeración Decimal (SND); y las unidades de tiempo, masa, temperatura y el sistema monetario nacional.

b. Comprensión y uso de las operaciones. Implica el desarrollo de capacidades para comprender y usar los distintos significados de las operaciones aritméticas en situaciones problemáticas en las que se requiere seleccionar, adaptar, elaborar y aplicar estrategias de solución; justificar sus procedimientos; y evaluar sus resultados.

Descripción de los Niveles del Mapa de Números y Operaciones

Destacado	<p>Interpreta los números reales como la unión de los racionales con los irracionales.</p> <p>Argumenta las diferencias características entre los distintos conjuntos numéricos. Interpreta y representa cantidades y magnitudes expresadas mediante logaritmos decimales y naturales.</p> <p>Evalúa el nivel de exactitud necesario al realizar mediciones directas e indirectas de tiempo, masa y temperatura. Resuelve y formula situaciones problemáticas referidas a las propiedades de los números y las operaciones en el conjunto de los números reales, empleando diversas estrategias y explicando por qué las usó.</p>
VII CICLO	<p>Interpreta el número irracional como un decimal infinito y sin período.</p> <p>Argumenta por qué los números racionales pueden expresarse como el</p>

<p>(3°, 4° y 5° de Secundaria)</p>	<p>cociente de dos enteros. Interpreta y representa cantidades y magnitudes mediante la notación científica. Registra medidas en magnitudes de masa, tiempo y temperatura según distintos niveles de exactitud requeridos, y distingue cuándo es apropiado realizar una medición estimada o una exacta. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a determinar tasas de interés, relacionar hasta tres magnitudes proporcionales, empleando diversas estrategias y explicando por qué las usó. Relaciona diferentes fuentes de información. Interpreta las relaciones entre las distintas operaciones.</p>
<p>VI CICLO (1° y 2° de Secundaria)</p>	<p>Representa cantidades discretas o continuas mediante números enteros y racionales en su expresión fraccionaria y decimal en diversas situaciones. Compara y establece equivalencias entre números enteros, racionales y porcentajes; relaciona los órdenes del sistema de numeración decimal con potencias de base diez. Selecciona unidades convencionales e instrumentos apropiados para describir y comparar la masa de objetos en toneladas o la duración de un evento en décadas y siglos. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a determinar cuántas veces una cantidad contiene o está contenida en otra, determinar aumentos o descuentos porcentuales sucesivos, relacionar magnitudes directa o inversamente proporcionales; empleando diversas estrategias y explicando por qué las usó. Relaciona la potenciación y radicación como procesos inversos.</p>
<p>V CICLO (5° y 6° de Primaria)</p>	<p>Representa cantidades discretas o continuas mediante fracciones, decimales y porcentaje. Compara y establece equivalencias entre números naturales, fracciones, decimales y porcentajes más usuales. Identifica la equivalencia de números de hasta seis dígitos en centenas, decenas y unidades de millar, y de unidades en décimos y centésimos. Estima, compara y mide la masa de objetos en miligramos; la duración de eventos en minutos y segundos; y la temperatura en grados Celsius. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de comparar e igualar dos cantidades, combinar los elementos de dos conjuntos o relacionar magnitudes directamente proporcionales, empleando diversas estrategias y explicando por qué las usó. Identifica la potencia como un producto de factores iguales.</p>
<p>IV CICLO (3° y 4° de Primaria)</p>	<p>Clasifica objetos en grupos y subgrupos, los reagrupa empleando un criterio distinto y explica la relación entre ellos. Representa las partes de un todo y una situación de reparto mediante fracciones. Compara y establece equivalencias entre números naturales hasta la unidad de millar y entre fracciones usuales. Identifica la equivalencia de números de hasta cuatro dígitos en centenas, decenas y unidades. Estima, compara y mide la masa de objetos empleando unidades convencionales como el kilogramo, el gramo y las propias de su comunidad, y la duración de eventos usando unidades convencionales como años, meses, hora, media hora o cuarto de hora. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de agregar, quitar, igualar o comparar dos cantidades, o de repetir una cantidad para aumentarla o repartirla en partes iguales; empleando diversas estrategias y explicando por qué las usó. Relaciona la división y la multiplicación como procesos inversos y a la división como un reparto en partes iguales.</p>
<p>III</p>	<p>Clasifica objetos que tienen características comunes y los organiza al interior</p>

<p>CICLO (1° y 2° de Primaria)</p>	<p>reconociendo algunos subgrupos; explica los criterios empleados para formar los grupos y subgrupos usando las expresiones <i>todos</i>, <i>algunos</i>, <i>ninguno</i>. Cuenta, compara y establece equivalencias entre diez unidades con una decena y viceversa, y entre números naturales hasta 100. Estima, compara y mide la masa de objetos, empleando unidades arbitrarias, y el tiempo, empleando unidades convencionales, como días o semanas. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de juntar, separar, agregar, quitar, igualar o comparar cantidades, empleando diversas estrategias; explica cómo llegó a la respuesta y si esta guarda relación con la situación planteada. Se aproxima a la noción de multiplicación como adiciones repetidas y a la noción de mitad como reparto en dos grupos iguales.</p>
<p>Previo (3-5 años)</p>	<p>Agrupar objetos de acuerdo a diferentes características perceptuales, pudiendo dejar objetos sin agrupar, y explica los criterios empleados para hacer dicho agrupamiento; identifica si muchos, pocos, uno o ninguno de los elementos de una colección presentan características específicas. Cuenta cuántas cosas hay en una colección de hasta 10 objetos e identifica el orden de un objeto en una fila o columna hasta el quinto lugar. Compara colecciones de objetos usando expresiones como <i>más que</i>, <i>menos que</i> y <i>tantos como</i>. Estima la duración de eventos usando unidades no convencionales, y los compara y ordena usando expresiones como <i>antes</i> o <i>después</i>; compara la masa de dos objetos, y reconoce el más pesado y el más ligero. Resuelve, situaciones problemáticas de contextos cotidianos referidas a acciones de agregar y quitar objetos de una misma clase, explicando que hizo para encontrar su respuesta.</p>

Nivel Previo

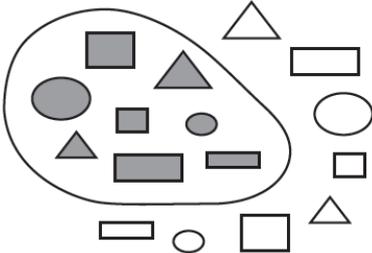
Agrupar objetos de acuerdo a diferentes características perceptuales, pudiendo dejar objetos sin agrupar, y explica los criterios empleados para hacer dicho agrupamiento; identifica si muchos, pocos, uno o ninguno de los elementos de una colección presentan características específicas.

Cuenta cuántas cosas hay en una colección de hasta 10 objetos e identifica el orden de un objeto en una fila o columna hasta el quinto lugar. Compara colecciones de objetos usando expresiones como *mas que*, *menos que* y *tantos como*. Estima la duración de eventos usando unidades no convencionales, y los compara y ordena usando expresiones como *antes* o *después*; compara la masa de dos objetos, y reconoce el mas pesado y el más ligero. Resuelve situaciones problemáticas de contextos cotidianos referidas a acciones de agregar y quitar¹¹ objetos de una misma clase, explicando que hizo para encontrar su respuesta.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- ✓ Forma colecciones de objetos tomando en cuenta sus características comunes y expresa por qué los agrupó así. Ejemplo:

Ante la consigna
Agrupa todos los que se
parecen en algo,
el niño agrupa todos los
plomos y deja sin agrupar
los blancos.



- ✓ Compara colecciones de objetos usando la correspondencia uno a uno y expresa donde hay *más que*, *menos que* y *tantos como*. Ejemplo:

Une cada niño con una
pelota.

¿Quié hay más, niños o
pelotas?



Expresa si muchos, pocos, uno o ninguno de los objetos de una colección tienen una característica señalada.

- ✓ Señala la posición de un objeto en una fila, usando los ordinales *primero*, *segundo*, *tercero*, *cuarto* y *quinto*.
- ✓ Asocia una cantidad de hasta 10 objetos con el símbolo del número que le corresponde.
- ✓ Resuelve problemas en los que requiere agregar o quitar una cantidad en colecciones de hasta 10 objetos, usando material concreto y el conteo, y explica que hizo para resolverlo (cambio 1 y 2)¹². Ejemplo:

Miguel tenía 5 pelotas en su colección de juguetes y en su cumpleaños recibió 4 pelotas más. ¿Cuántas pelotas tiene ahora Miguel?

Usando botones resuelve la situación y da su respuesta.



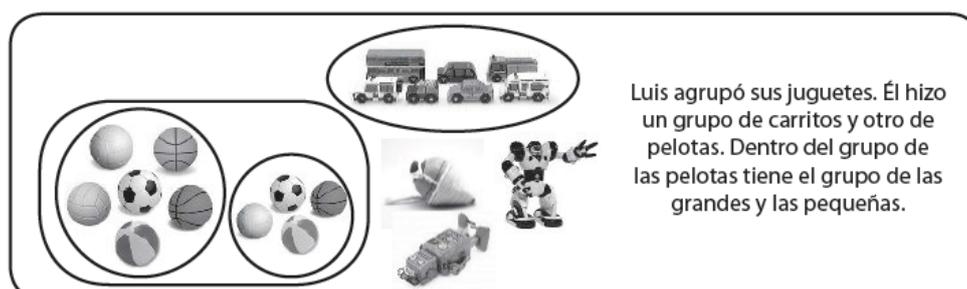
- ✓ Ordena sus propias actividades cotidianas (levantarse, asearse, vestirse, desayunar, etc.).

III Ciclo (1° y 2° de Primaria)

Clasifica objetos que tienen características comunes y los organiza al interior reconociendo algunos subgrupos; explica los criterios empleados para formar los grupos y subgrupos usando las expresiones “todos”, “algunos”, “ninguno”. Cuenta, compara y establece equivalencias entre diez unidades con una decena y viceversa, y entre números naturales hasta 100. Estima, compara y mide la masa de objetos, empleando unidades arbitrarias, y el tiempo, empleando unidades convencionales, como días o semanas. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de juntar, separar, agregar, quitar, igualar o comparar cantidades¹³, empleando diversas estrategias; explica como llegó a la respuesta y si esta guarda relación con la situación planteada. Se aproxima a la noción de multiplicación como adiciones repetidas y a la noción de mitad como reparto en dos grupos iguales.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

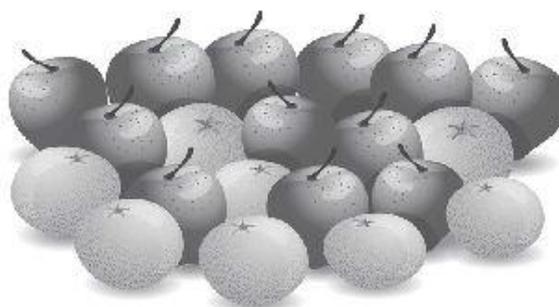
➤ Agrupa objetos de acuerdo a un criterio y utiliza otro para formar subgrupos al interior, y explica los criterios empleados. Ejemplo:



➤ Resuelve problemas en los que requiere separar una de las partes de un todo, usando soporte concreto y gráfico, y explica que hizo para resolverlo (combinación 2). Ejemplo:

Compré 20 frutas para llevar al colegio, 12 son manzanas y las demás mandarinas.

¿Cuántas son mandarinas?



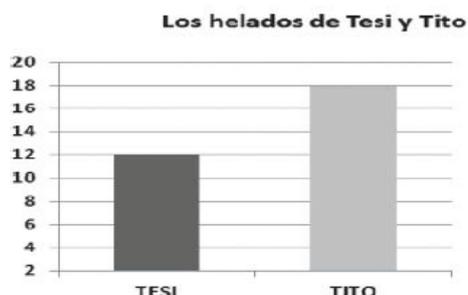
➤ Resuelve problemas en los que requiere encontrar el valor que se agregó o quitó a una cantidad, usando soporte concreto, gráfico y simbólico, y explica que hizo para resolverlo (cambio 3 y 4; ver ejemplos en el glosario).

- Resuelve problemas en los que requiere encontrar el valor que necesita una cantidad para ser igual a la otra y explica que hizo para resolverlo (igualación 1 y 2). Ejemplo:

Sofía tiene 26 monedas de un nuevo sol y su prima Daniela tiene 18. Cuantas monedas más necesita Daniela para tener tanto como Sofía? (igualación 1)



- Resuelve problemas en los que requiere encontrar la diferencia entre dos cantidades, usando soporte concreto, gráfico y simbólico, y explica que hizo para resolverlo (comparación 1 y 2). Ejemplo:



Tesi y su hermano Tito prepararon helados para vender. Observa en la tabla cuántos helados vendieron. ¿Cuántos helados menos vendió Tesi que Tito?

- Resuelve problemas en los que requiere encontrar el doble o triple de una cantidad en un ámbito no mayor a 50, usando adiciones repetidas, y explica que hizo para resolverlo.

- Resuelve problemas que requieren de dos estructuras aditivas para su solución y explica que hizo para resolverlo. Ejemplo:

Tomas tiene 25 carritos, 8 son azules, 10 son verdes y los demás son rojos. ¿Cuántos son rojos?

- Compara la masa de dos objetos en una balanza y puede decir, por ejemplo, que dos tazas pesan tanto como una botella.
- Resuelve situaciones en las que requiere usar el calendario para determinar la duración de un evento en días y semanas, y la fecha en la que ocurrió u ocurrirá un evento en relación a un referente. Ejemplo:

El niño puede responder que faltan 18 días o también 2 semanas y 4 días.

Si hoy es martes 7 de diciembre.
¿Cuántos días faltan para Navidad?

DICIEMBRE						
LU	MA	MI	JU	VI	SA	DO
			1	2	3	4
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

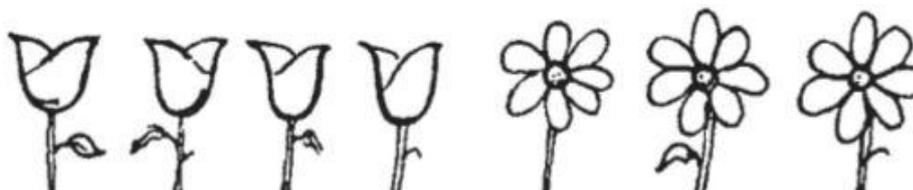
IV Ciclo

(3° y 4° de Primaria)

Clasifica objetos en grupos y subgrupos, los reagrupa empleando un criterio distinto y explica la relación entre ellos. Representa las partes de un todo y una situación de reparto mediante fracciones. Compara y establece equivalencias entre números naturales hasta la unidad de millar y entre fracciones usuales¹⁴. Identifica la equivalencia de números de hasta cuatro dígitos en centenas, decenas y unidades. Estima, compara y mide la masa de objetos empleando unidades convencionales como el kilogramo, el gramo y las propias de su comunidad, y la duración de eventos usando unidades convencionales como años, meses, hora, media hora o cuarto de hora. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de agregar, quitar, igualar o comparar dos cantidades¹⁵, o de repetir una cantidad para aumentarla o repartirla en partes iguales¹⁶; empleando diversas estrategias y explicando por qué las uso. Relaciona la división y la multiplicación como procesos inversos y a la división como un reparto en partes iguales.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- Explica la relación entre grupos y subgrupos. Ejemplo: Observa la siguiente figura e indica que hay más tulipanes que margaritas y que si agrega dos tulipanes más habrá más flores que tulipanes.



- Representa un número natural usando combinaciones aditivas y multiplicativas.
- Representa cantidades continuas o discretas con fracciones, empleando material concreto, gráfico y simbólico. Ejemplo:

Representa la cuarta parte de 8 canicas (cantidad discreta)			Representa la sexta parte de una torta (cantidad continua)		
		1/4 de 8			1/6 de 1
Material concreto	Representación gráfica	Representación simbólica	Material concreto	Representación gráfica	Representación simbólica

➤ Identifica una unidad de millar como equivalente a 10 centenas, a 100 decenas y 1000 unidades.

- Resuelve problemas en los que requiere encontrar la cantidad que fue aumentada o disminuida y explica el procedimiento utilizado (Cambio 5 y 6; ver en el Glosario la página 37). Ejemplo:

Pablo tenía algunas cartas. Le dio a Sofía 8 cartas. Ahora tiene 29 cartas. ¿Cuántas cartas tenía Pablo? (cambio 6)

- Resuelve problemas en los que requiere hallar la cantidad que se iguala a otra y explica el procedimiento utilizado (igualación 3 y 4; ver en el Glosario página 34).
- Resuelve problemas en los que requiere encontrar la cantidad comparada y explica el procedimiento utilizado (comparación 3 y 4; ver en el Glosario la página 38). Ejemplo:

Alonso tiene 12 peces. Cesar tiene 9 peces más que Alonso. ¿Cuántos peces tiene Cesar? (comparación 3)

- Resuelve problemas en los que una cantidad se repite varias veces y explica el procedimiento utilizado (multiplicativos de proporcionalidad simple, ver en el Glosario la página 39).
- Resuelve problemas en los que requiere repartir una cantidad en partes iguales o encontrar el número de grupos que se forma y explica el procedimiento utilizado (multiplicativos de proporcionalidad simple, ver en el Glosario la página 39). Ejemplo:

Giordano observa en la mesa 36 botones y, además, 6 paquetes de botones vacíos. ¿Cuántos botones vienen en cada paquete? (Partición)

- Resuelve problemas que combinan estructuras aditivas y multiplicativas para su solución. Ejemplo:

Para pagar una deuda de 2180 soles, Ángel paga con billetes de 10 y 50 soles, y monedas de 5 soles. Si da 14 billetes de 50 soles y 24 billetes de 10 soles, ¿cuántas monedas de 5 soles debe de dar para cancelar la deuda?

- Estima los resultados que pueden obtenerse al resolver situaciones aditivas y multiplicativas con números naturales.
- Determina y compara la masa de objetos como bolsas de arena, bolsas de menestras, etc. que puedan expresarse como 250 g o $\frac{1}{4}$ de kg; 500 g o $\frac{1}{2}$ kg, 750 g o $\frac{3}{4}$ de kg, 1000 g o 1kg.

V Ciclo (5° y 6° de Primaria)

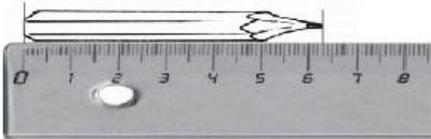
Representa cantidades discretas o continuas mediante fracciones, decimales y porcentaje. Compara y establece equivalencias entre números naturales, fracciones, decimales y porcentajes más usuales¹⁷. Identifica la equivalencia de números de hasta seis dígitos en centenas, decenas y unidades de millar, y de unidades en decimos y centésimos. Estima, compara y mide la masa de objetos en miligramos; la duración de eventos en minutos y segundos; y la temperatura en grados Celsius. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de comparar e igualar dos cantidades¹⁸, combinar los elementos de dos conjuntos¹⁹ o relacionar magnitudes directamente proporcionales, empleando diversas estrategias y explicando el procedimiento seguido. Identifica la potencia como un producto de factores iguales.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- ✓ Establece equivalencias entre decimales, fracciones y porcentaje con soporte concreto, gráfico y simbólico.

Representa la mitad de 6 pelotas (cantidad discreta)		Representa las tres cuartas partes de una torta (cantidad continua)	
	$\frac{1}{2}$ de 6 = 0,5 de 6 = 50% de 6		$\frac{3}{4}$ = 0,75 = 75%
Representación gráfica	Representación simbólica	Representación gráfica	Representación simbólica

- ✓ Representa los significados de la fracción como operador, medida o razón.

Fracción como operador	Fracción como medida	Fracción como razón
Los $\frac{3}{4}$ de los estudiantes de sexto grado son mujeres. Si en total hay 24 estudiantes, ¿cuántas son mujeres?	Para medir la longitud del lápiz en centímetros es necesario dividir la unidad en diez partes iguales, entonces el lápiz mide 6 y $\frac{3}{10}$ de cm. 	La relación del número de hombres al de mujeres en el aula es: $\frac{3}{5}$

- ✓ Representa con material concreto y gráfico la adición o sustracción de fracciones heterogéneas y decimales.
- ✓ Resuelve problemas en los que requiere encontrar el referente de comparación y explica el procedimiento utilizado (Comparación 5 y 6; ver en el Glosario la página 38).
- ✓ Resuelve problemas en los que requiere encontrar el referente de igualdad y explica el procedimiento utilizado (Igualación 5 y 6; ver en el Glosario la página 38).

Ejemplo: Andrés tiene 21 chapitas. Si Andrés regala $\frac{1}{3}$ de sus chapitas, tendrá tantas chapitas como Diego. ¿Cuántas chapitas tiene Diego? (Igualación 6)

- ✓ Resuelve problemas en los que usa la multiplicación para combinar los elementos de dos conjuntos y explica el procedimiento utilizado (Multiplicativos de producto cartesiano; ver en el Glosario la pág. 39).

Ejemplo: El equipo de voleybol tiene 6 camisetas diferentes que al combinarlos con las pantalonetas permiten obtener 12 formas de vestirse. ¿De cuántas pantalonetas diferentes dispone el equipo? (Tipo 2)

- ✓ Resuelve problemas que combinan dos o tres estructuras (aditivas y multiplicativas) para su solución y explica el procedimiento utilizado.

Ejemplo: En una tienda hay 60 libros colocados en 2 estanterías. En una estantería hay 12 libros más que en la otra. ¿Qué porcentaje de libros hay en la estantería que tiene más libros?

- ✓ Estima los resultados que pueden obtenerse al resolver situaciones aditivas y multiplicativas con números naturales.
- ✓ Emplea la balanza electrónica para determinar la masa de objetos pequeños, como pastillas, un punado de sal, de arroz, etc.; determina la masa de una hoja de papel a través de mediciones indirectas.

VI Ciclo

(1° y 2° de Secundaria)

Representa cantidades discretas o continuas mediante números enteros y racionales en su expresión fraccionaria y decimal en diversas situaciones. Compara y establece equivalencias entre números enteros, racionales y porcentajes; relaciona los órdenes del sistema de numeración decimal con potencias de base diez. Selecciona unidades convencionales e instrumentos apropiados para describir y comparar la masa de objetos

en toneladas o la duración de un evento en décadas y siglos. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a determinar cuántas veces una cantidad contiene o está contenida en otra²⁰, determinar aumentos o descuentos porcentuales sucesivos, relacionar magnitudes directa o inversamente proporcionales; empleando diversas estrategias y explicando por qué las uso. Relaciona la potenciación y radicación como procesos inversos.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- Usa equivalencias entre números enteros, racionales y porcentajes en situaciones contextualizadas

Ejemplo: Pedro gana S/1200, gasta el 40% en alimentación y el 1/10 en movilidad, ¿que parte de su sueldo le queda?

- Compara, mide y registra los cambios de temperatura de distintos lugares en grados Celsius.
- Resuelve problemas multiplicativos en los que requiere encontrar la cantidad comparada o el referente de comparación y explica la elección de su estrategia sustentando su respuesta, según las condiciones del problema (multiplicativos de comparación).

Ejemplo: Pedro tiene 72,85 nuevos soles, que son 3 veces más dinero que el que tiene Juan. ¿Cuánto dinero tiene Juan?

- Resuelve problemas que requieren encontrar los múltiplos o divisores comunes de varios números y explica la elección de su estrategia sustentando su respuesta, según las condiciones del problema (MCM y MCD).

Ejemplo: Un empresario reparte canastas navideñas a todos sus empleados. Este año cuenta con 504 tarros de leche, 420 paquetes de menestras, 252 bolsas de arroz y 84 panetones. ¿Cuántas canastas puede armar? ¿Cuántas unidades de cada producto colocara en las canastas?

- Resuelve y formula situaciones proporcionalidad directa e inversa, a partir de diversos contextos y explica la elección de su estrategia sustentando su respuesta, según las condiciones del problema.

Ejemplo: Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 toneles de 200 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de vino empleando 64 toneles. ¿Cual deberá ser la capacidad de esos toneles?

- Resuelve problemas que combinan varias estructuras multiplicativas para su solución y explica la elección de su estrategia sustentando su respuesta, según las condiciones del problema.

- Resuelve problemas referidos a aumentos y descuentos sucesivos en el valor de un producto, y sustenta las estrategias empleadas según las condiciones del problema.

Ejemplo: Por cierre de temporada escolar la librería “El estudiante” ofrece descuentos del 20% más el 30% en compras cuyos montos son mayores a 200 nuevos soles y descuentos del 45% en compras menores a 200 nuevos soles. ¿A qué descuento equivale cada caso?

- Aproxima a números enteros los resultados que pueden obtenerse al resolver diversas situaciones.
- Identifica el instrumento y la unidad adecuada para medir un objeto.

Por ejemplo, indica que, para medir la masa de un camión, la unidad será la *toí* para registrar hechos históricos; utiliza el *gigabyte* para medir la capacidad de almacenamiento de información que registran las computadoras.

- Mide y compara la temperatura de su localidad en distintos momentos del año y los asocia a las estaciones del año.

VII Ciclo

(3°, 4° y 5° de Secundaria)

Interpreta el número irracional como un decimal infinito y sin periodo. Argumenta por que los números racionales pueden expresarse como el cociente de dos enteros. Interpreta y representa cantidades y magnitudes mediante la notación científica. Registra medidas en magnitudes de masa, tiempo y temperatura según distintos niveles de exactitud requeridos, y distingue cuando es apropiado realizar una medición estimada o una exacta. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a determinar tasas de interés, relacionar hasta tres magnitudes proporcionales, empleando diversas estrategias y explicando por qué las usó. Relaciona diferentes fuentes de información. Interpreta las relaciones entre las distintas operaciones.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- ✓ Identifica y representa cantidades mediante números decimales periódicos o no periódicos en situaciones contextualizadas.

Ejemplo: En un juego de Bingo el premio es de 1000 soles. Tres participantes deben repartirse este dinero en partes iguales. ¿Cómo escribirías esta cantidad? ¿Por qué?

- ✓ Identifica que π , e y raíces cuadradas inexactas (como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$) son números irracionales.

- ✓ Resuelve problemas que demandan evaluar tasas de interés y efectos de un pago anticipado en transacciones financieras, y sustenta las estrategias empleadas según las condiciones del problema.

Ejemplo: Jorge tiene que decidir entre dos tipos de préstamos ofrecidos por un mismo banco. El pretende pagar en los próximos 6 meses todo el monto del préstamo que adeude en esa fecha.

Propuesta	Tasa de interés anual	Mes de gracia	Tiempo
A	12%	3 meses	1 año
B	10%	Sin mes de gracia	1 año

¿Cuál de las dos propuestas le conviene más? Sustenta tu respuesta.

- ✓ Resuelve problemas referidos a relaciones de proporcionalidad directa o inversa hasta con tres magnitudes y sustenta las estrategias empleadas según las condiciones del problema.
- ✓ Resuelve y formula situaciones problemáticas que combinan variadas estructuras (aditivas, multiplicativas y de proporcionalidad) en los distintos conjuntos numéricos y variados contextos, y sustenta las estrategias empleadas según las condiciones del problema.

Ejemplo: .Cuántos Kg de cobre se deberán comprar para construir un cilindro de 10 cm de alto y 0,5 m de radio? Considera que la densidad del cobre es 8960 kg/m^3 .

- ✓ Discrimina entre la pertinencia del cálculo exacto o estimado para dar respuesta a un problema.

Ejemplo: .Que aproximación conviene hacer para que la cantidad de cobre sea la más exacta? ¿Por qué?

- ✓ Reconoce que, cuando debe proporcionar una medida muy precisa, necesita emplear décimas, centésimas y milésimas para expresar la medición.
- ✓ Identifica las dificultades que tuvo al aplicar una estrategia para resolver un problema y reflexiona sobre otras formas de solución.

NIVEL DESTACADO

Interpreta los números reales como la unión de los racionales con los irracionales. Argumenta las diferencias características entre los distintos conjuntos numéricos. Interpreta y representa cantidades y magnitudes expresadas mediante logaritmos decimales y naturales. Evalúa el nivel de exactitud necesario al realizar mediciones directas e indirectas de tiempo, masa y temperatura. Resuelve y formula situaciones

problemáticas referidas a las propiedades de los números y las operaciones en el conjunto de los números reales, empleando diversas estrategias y explicando por qué las usó.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- Representa conjuntos de números reales usando intervalos.
- Argumenta por que el conjunto de los números racionales es denso, y los conjunto de los naturales y enteros no lo son.

Por ejemplo, explica que, usando la propiedad del término medio, siempre es posible encontrar otro número fraccionario entre un par de fracciones o, lo que es lo mismo, siempre es posible encontrar un decimal entre dos decimales continuos del mismo orden.

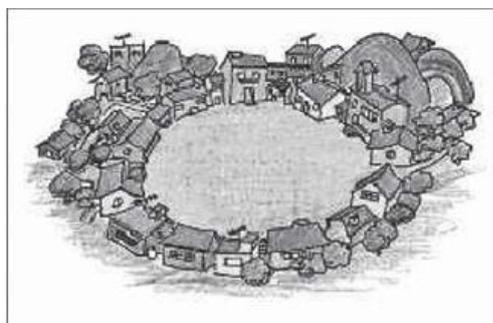
- Representa e interpreta cantidades muy grandes o muy pequeñas expresadas mediante logaritmos decimales y naturales.

Por ejemplo, expresa mediante potencias de 10 la distancia entre el Sol y Alpha Centauri (como 4×10^{13} km)

- Resuelve y formula problemas referidos a números perfectos, triangulares, cuadrados perfectos, etc.

Ejemplo: Halle un numero natural tal que, si su última cifra de la derecha se mueve al primer lugar de la izquierda, se obtiene un número igual al doble del original.

- Argumenta la pertinencia de un cálculo exacto o estimado al dar respuesta a una situación problemática.



Ejemplo: Un contratista calcula el costo total por remodelar un parque circular en función del área. Para ello hace el siguiente cálculo.

Valor contrata = $512 \cdot \text{Área de la plaza} = 512 \cdot (3,15) (50)^2$ ¿Qué aproximación de π , es conveniente para un cálculo justo? ¿Por qué?

9. EXPLICAR. Describir o exponer las razones²¹ o procedimientos seguidos para la solución de un problema, exigiendo en el alumno establecer conexiones entre sus ideas (Bishop, 1999).

10. IDENTIFICAR. Diferenciar los rasgos distintivos de un objeto matemático; es decir, determinar si pertenece a una determinada clase que presenta ciertas características comunes (Hernández, Delgado y otros, 1999).

11. INTERPRETAR. Atribuir significado a las expresiones matemáticas, de modo que estas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problema real del que se trate. Implica tanto codificar como decodificar una situación problemática (Hernández, Delgado y otros, 1999, pp. 69-87).

12. MODELAR. Asociar un objeto no matemático a un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características considerados relevantes para la solución de un problema (Hernández, Delgado y otros, 1999, pp. 69-87).

13. PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA. Situaciones problemáticas que se pueden resolver con la adición o la sustracción. Para facilitar la comprensión de estas operaciones, existe una variedad de situaciones de estructura aditiva que ayudan a conectar la adición con la sustracción; por esta razón, se recomienda ir abordándolas utilizando las siguientes situaciones: combinación, cambio, comparación e igualación (Castro E., 2001).

Combinación: Situación en la que se puede tener como dato las cantidades parciales o la cantidad total.

Caso	Ejemplos	Parte	Parte	Todo
Combinación 1	Jorge tiene 3 pelotas y 8 carritos. ¿Cuántos juguetes tiene Jorge?	3	8	Desconocido
Combinación 1	En mi caja hay 11 juguetes entre carritos y pelotas. Si conté 3 pelotas, ¿cuántos carritos hay?	3	Desconocido	11

Cambio o transformación: Situaciones en las que hay un aumento o disminución de una cantidad en una secuencia de tiempo. La incógnita puede estar en el estado inicial, en el cambio o en el final.

Caso	Ejemplos	Cantidad inicial	Cambio	Cantidad final
Cambio 1	Pilar tenía 14 soles; luego recibe 3 soles. ¿Cuántos soles tiene ahora?	14	Aumentó 3	Desconocida
Cambio 2	Pilar tiene 14 soles; compra una hamburguesa por 6 soles.	14	Disminuyó 6	Desconocida

	¿Cuántos soles le quedan?			
Cambio 3	Cecilia tenía 24 figuras en su álbum. Ricardo le regalo algunas figuras. Ahora tiene 32 figuras. ¿Cuántas figuras le regalo Ricardo?	24	Desconocida	32
Cambio 4	Cecilia tenía 24 figuras en su álbum. Le da a Ricardo algunas figuras. Ahora tiene 15 figuras. ¿Cuántas figuras le dio Ricardo?	24	Desconocida	15
Cambio 5	Rosa tenía algunas galletas. Irma le dio 14 galletas. Ahora tiene 23 galletas. ¿Cuántas galletas tenía Rosa?	Desconocida	Aumentó 14	23
Cambio 6	Rosa tenía algunas galletas. Le dio a Irma 5 galletas. Ahora tiene 23 galletas. ¿Cuántas galletas tenía Rosa?	Desconocida	Disminuyó 15	4

Igualación: Situaciones en las que se requiere igualar una cantidad con respecto a otra. La incógnita puede estar en la referencia, en lo que se iguala o en la diferencia.

Caso	Ejemplos	Referencia	Comparada	Diferencia
Igualación 1	Adolfo tiene 18 chapitas. Carlos junto 12 chapitas. ¿Cuántas chapitas debe conseguir Carlos para tener tanto como Adolfo?	18	12	Desconocida
Igualación 2	Adolfo tiene 18 chapitas. José tiene 12 chapitas. ¿Cuántas chapitas debe dejar Adolfo para tener tantas como José?	18	12	Desconocida
Igualación 3	Paty tiene 15 semillas. Si Luisa consigue 4 semillas, tendrá tantas semillas como Paty. ¿Cuántas semillas tiene Luisa?	15	Desconocida	4 más
Igualación 4	Paty tiene 15 semillas. Si Camila pierde 6 semillas, tendrá tantas semillas como Paty. ¿Cuántas semillas tiene Camila?	15	Desconocida	6 menos
Igualación 5	Rosa tiene 19 pulseras. Si Rosa obtiene 7 pulseras, tendrá tantas pulseras como Carmen. ¿Cuántas pulseras tiene Carmen?	Desconocida	19	7 más
Igualación 6	Rosa tiene 19 pulseras. Si Rosa regala 3 pulseras, tendrá tantas pulseras como Carmen. ¿Cuántas pulseras tiene Carmen?	Desconocida	19	3 menos

Comparación: Situaciones en las que se comparan dos cantidades. La incógnita puede estar en la referencia, en lo que se compara o en la diferencia.

Caso	Ejemplos	Referencia	Comparada	Diferencia
Comparación 1	Cesar tiene 8 caramelos. Manolo tiene 13 chocolates. ¿Cuántos dulces tiene Manolo más que Cesar?	8	13	Desconocida
Comparación 2	Cesar tiene 8 caramelos. Manuel tiene 5 galletas. ¿Cuántos dulces tiene Manuel menos que Cesar?	8	5	Desconocida
Comparación 3	Carola tiene 11 años. Ernesto tiene 3 años más que Carola. ¿Cuántos años tiene Ernesto?	11	desconocido	3 más
Comparación 4	Carola tiene 11 años. Verónica tiene 3 años menos que Carola. ¿Cuántos años tiene Verónica?	11	desconocido	3 menos
Comparación 5	Juan tiene 16 bolitas. Juan tiene 7 bolitas más que Percy. ¿Cuántas bolitas tiene Percy?	desconocido	16	7 más
Comparación 6	Juan tiene 16 bolitas. Juan tiene 6 bolitas menos que Tomas. ¿Cuántas bolitas tiene Tomas?	desconocido	16	6 menos

14. PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

Situaciones que se pueden resolver con la multiplicación o la división. Para facilitar la comprensión de estas operaciones, existe una variedad de situaciones de estructura multiplicativa que ayudan a conectar la multiplicación con la división. Existen tres estructuras multiplicativas:

Proporcionalidad simple: Se trata de problemas en los que hay una proporción directa entre dos cantidades. Hay tres posibilidades dentro de esta categoría, según cuál de las tres cantidades sea la incógnita. Estas son multiplicación, partición y cuotición o medida. (Castro E., 2001)

Caso	Ejemplos	Nº de grupos	Nº de elementos por grupo	Nº total
Multiplicación	Ana compra 5 paquetes de galletas; cada paquete contiene 8 galletas. ¿Cuántas galletas ha comprado?	5	6	desconocido
Partición	Ana observa en la mesa 40 galletas y, además, 5 paquetes de galletas vacíos.	5	desconocido	40

	¿Cuántas galletas vienen en cada paquete?			
Cuotización o medida	Hay 40 galletas en la mesa. En cada paquete vienen 8 galletas. ¿Cuántos paquetes se compraron?	desconocido	8	40

Comparación: Se trata de problemas en los que se comparan dos cantidades, una de las cuales es el referente y la otra el comparado. Esta relación da lugar a un factor de comparación o escalar. Hay tres tipos de comparación: de aumento, de disminución y de igualación.

COMPARACIÓN DE LA FORMA *Veces más que*²²

Caso	Ejemplos	Juan referente	Factor de comparación (escalar)	Pedro (comparado)
Multiplicación	Juan ahorro 320 soles y su hermano Pedro logro ahorrar tres veces más dinero que Juan. ¿Cuánto dinero tiene Pedro?	320	Por 3	desconocido
Partición	Juan ahorro 320 soles y su hermano Pedro ahorro 960 soles. ¿Cuántas veces más dinero tiene Pedro que Juan?	320	desconocido	960
Cuotización o medida	Pedro ahorro 960 soles, que son 3 veces más dinero que el que tiene Juan. ¿Cuánto ahorró Juan?	desconocido	Por 3	960

COMPARACIÓN DE LA FORMA *Veces menos que*

Caso	Ejemplos	María referente	Factor de comparación (escalar)	Teresa (comparado)
Multiplicación	María tiene 72 soles y Teresa 3 veces menos soles. ¿Cuántos soles tiene Teresa?	72	Entre 3	desconocido
Partición	María tiene 72 soles y Teresa 24 soles. ¿Cuántas veces menos soles tiene Teresa que María?	72	desconocido	24
Cuotización o medida	Teresa tiene 24 soles, que son 3 veces menos el dinero que tiene María. ¿Cuántos soles tiene María?	desconocido	Entre 3	24

COMPARACIÓN DE LA FORMA *Veces tantas como*

Caso	Ejemplos	Luis referente	Factor de comparación (escalar)	José (comparado)
Multiplicación	Luis tiene 12 figuras y José tiene 3 veces tantas figuras como Luis. ¿Cuántas figuras tiene José?	12	Por 3	desconocido
Partición	Luis tiene 12 figuras y José tiene 36 figuras. ¿Cuántas veces tiene José tantas figuras como Luis?	12	desconocido	36
Cuotización o medida	José tiene 36 figuras, que son 3 veces tantas figuras como las que tiene Luis. ¿Cuántas figuras tiene Luis?	desconocido	Por 3	36

***“Tres veces más que” equivale a decir “el triple de”, según Castro (2001)*

Producto cartesiano: Situaciones referidas a las diferentes formas de combinar elementos de conjuntos; por ejemplo:

Caso	Ejemplos	Polos	Pantalones	Número de combinaciones
Tipo 1	Tengo 14 polos y 6 pantalones. ¿De cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?	14	6	desconocido
Tipo 2	Tengo 14 polos que, al combinarlos con los pantalones que tengo, me permiten 84 formas de vestirme. ¿De cuántos pantalones dispongo?	14	desconocido	84

15. REPRESENTAR. Elaborar una imagen, grafico o símbolo visual de un objeto matemático y sus relaciones empleando formas geométricas, diagramas, tablas, el plano cartesiano, etc.

16. RESOLVER. Encontrar un método que conduzca a la solución de un problema matemático, el cual puede estar enmarcado en diferentes contextos tanto matemáticos como de la vida real y de contextos personales, familiares, escolares o científicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, Á. (2009). *El aprendizaje realista: una contribucion de la investigacion en Educacion Matematica a la formacion del profesorado*. En M.J. Gonzalez, M.T. Gonzalez & J. Murillo (Eds.), *Investigacion en Educacion Matematica XIII*, Santander: SEIEM.

ANDONEGUI M. (2006). "Fracciones, concepto y su representacion". *Serie Desarrollo del pensamiento matematico* Caracas: Serie Fracciones N°9, <http://publicaciones.caf.com/media/1209/61.pdf>

ARELLANO T. (2006). Diplomado de Segunda Especialidad en Didactica de la Matematica en la Educacion Primaria. Modulo 3. "Comprension numerica y habilidades operatorias". Material de estudio. Lima: Pontificia Universidad Catolica del Peru, PUCP distancia.

BISHOP A. (1999). *Enculturacion matematica la educacion matematica desde una perspectiva cultural*, Paidos, 1999, Espana.

CASTRO, E. (editor- 2001). *Didactica de la matematica en educacion primaria*. Madrid: Editorial sintesis.

CHAVES M., HEUDEBERT A. (2006). Diplomado de Segunda Especialidad en Didactica de la Matematica en la Educacion Primaria. "Iniciacion a la Matematica y Desarrollo del Pensamiento Logico". Modulo 2. Material de estudio. Lima: Pontificia Universidad Catolica del Peru, PUCP distancia.

CID, E. (2011). *Obstaculos epistemologicos en la ensenanza de los numeros negativos*. Departamento de Matematica de la Universidad de Zaragoza. Consulta: agosto de 2011. www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf

DEPARTAMENT FOR EDUCATION (1999). *The National Curriculum for England*. London, Editado por el Departamento de Educacion y empleo. Consulta: marzo 2010. < <http://www.education.gov.uk/>>.

GALLARDO J., GONZALES J., QUISPE, W. (2008). Interpretando la comprension Matematica en escenarios basicos de valoracion. "Un estudio de las interferencias en el uso de los significados de la fraccion". Caracas: *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, Volumen 11(3), p.362-372. Consulta: junio de 2011. http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2766159>

GALLARDO J., GONZALES J., QUISPE, W. (2008). ".Que comprension de la fraccion fomentan los libros de texto de matematicas peruanos?" *PNA*, 4(3), 111-131. Consulta: mayo del 2011. www.pna.es/Numeros2/pdf/Quispe2010Que.pdf.

GODINO, J. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Septiembre, 2010. Consultado junio 2011 en: <http://www.ugr.es/local/jgodino>

GONZALEZ R. (2008). La polaridad positiva en español, memoria para optar el grado de doctor, capítulo 6: cuantificadores aproximativos. Universidad Complutense de Madrid. Consultado el día 24 de abril de 2012 en <http://eprints.ucm.es/8145/1/T30427.pdf>

GOVERNMENT OF WESTERN AUSTRALIA (1998). The Curriculum Framework Learning Statement for Mathematics, Consulta: marzo de 2010. http://www.scsa.wa.edu.au/internet/Years_K10/Curriculum_Framework.

GRAVEMEIJER, K. y J. T. Hans Freudenthal: un matemático en didáctica y teoría curricular. Traducción: Norma Saggese, Fernanda Gallego y AnaBressan (GPDM). *J. Curriculum studies*, 2000, vol. 32, no. 6, 777- 796.

INCE (2004). *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003*. España: Ministerio de educación, cultura y deporte.

IPEBA (2011). “Marco de referencia de estándares de aprendizaje para el Perú”. *Serie documentos técnicos*. Lima: Impresión Arte Perú.

MARÍA, J. (1998). “Números racionales positivos: reflexiones sobre la instrucción”. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza. España. Ediciones Universidad de Salamanca, 1998, Aula N° 10.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2009). Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular. Lima, MED 2009, 2da edición. Aprobado con R.M. 0440 – 2008-ED.

- (2009) Guía de análisis para los docentes, evaluación censal de estudiantes 2009 – segundo grado de primaria. Lima: MED: Unidad De Medición De La Calidad.
- (2004) Propuesta pedagógica para el desarrollo de las capacidades matemáticas. *Matemática para la Vida*. Educación Básica Regular. Lima: Imagio S.A.C.
- (2005) Evaluación nacional del rendimiento estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados –Secundaria, Lima: MED: Unidad De Medición De La Calidad.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá, Editorial Ministerio de Educación Nacional. Consulta: abril de 2010. www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf.pdf.

MINISTRY OF EDUCATION (2005). The Ontario Curriculum, Grades 1-8 Mathematics. Ontario, Queen's Printer. Consulta: enero de 2011. <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/elementary/math.html>

